

# ÁLGEBRA DE BOOLE

## POSTULADOS, TEOREMAS E PROPRIEDADES

A aplicação principal da álgebra de Boole é o estudo e a simplificação algébrica de circuitos lógicos. As variáveis booleanas podem assumir apenas dois valores: 0 e 1.

Na realidade uma expressão booleana é uma expressão matemática cujas variáveis são booleanas e o resultado será sempre 0 ou 1.

Consideremos por exemplo:  $S = A + B \rightarrow$  Tanto S, como A, como B só podem assumir os valores 0 ou 1.

**POSTULADOS:** Os postulados são utilizados na minimização bem como na manipulação de expressões lógicas.

### 1 - POSTULADO DA COMPLEMENTAÇÃO:

Supondo a proposição A  
O complemento de  $A = \bar{A}$

Desta forma:

$$\text{Se } A = 0 \rightarrow \bar{A} = 1$$

$$\text{Se } A = 1 \rightarrow \bar{A} = 0$$

Considerando por exemplo os dígitos 1 e 0:

$$\bar{1} = 0$$

$$\bar{0} = 1$$

Através do postulado da complementação podemos estabelecer a identidade da dupla negação:

Se  $A = 1$ , teremos  $\bar{A} = 0$

Se  $\bar{A} = 0$ , então  $\bar{\bar{A}} = 1$

Se  $A = 0$ , teremos  $\bar{A} = 1$

Se  $\bar{A} = 1$ , então  $\bar{\bar{A}} = 0$

Concluimos então:

$$\text{Quando } A = 1 \rightarrow \bar{\bar{A}} = 1$$

$$\text{Quando } A = 0 \rightarrow \bar{\bar{A}} = 0$$

$\rightarrow$  Daí:  $\bar{\bar{A}} = A$

$$\bar{\bar{0}} = 0 \text{ e } \bar{\bar{1}} = 1$$

**2 - POSTULADO DA ADIÇÃO:** Este postulado determina as regras da adição na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função OR.

$0 + 0 = 0$	$A + 0 = A$
$0 + 1 = 1$	$A + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$A + \bar{A} = A$
$1 + 1 = 1$	$A + \bar{A} = 1$

Postulado                      Teorema

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1)  $A + 0 = A$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 + 0 = 0$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 + 1 = 1$

O resultado será sempre igual a variável A

2)  $A + 1 = 1$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 + 1 = 1$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 + 1 = 1$

O resultado será sempre igual a 1

Sempre que somarmos 1 a qualquer variável, o resultado será sempre igual a 1

3)  $A + A = A$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 + 0 = 0$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 + 1 = 1$

Todas as vezes que somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma

4)  $A + \bar{A} = 1$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 + 1 = 1$  (pois  $\bar{A} = 1$ )

Se  $A = 1$ , temos:  $1 + 0 = 1$  (pois  $\bar{A} = 0$ )

Quando somamos uma variável ao seu complemento o resultado será sempre 1

### 3 - POSTULADO DA MULTIPLICAÇÃO:

Este postulado determina as regras da multiplicação na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função AND.

$0 \cdot 0 = 0$	$A \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$A \cdot 1 = A$
$1 \cdot 0 = 0$	$A \cdot A = A$
$1 \cdot 1 = 1$	$A \cdot \bar{A} = 0$

Postulado

Teorema

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1)  $A \cdot 0 = 0$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 \cdot 0 = 0$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 \cdot 0 = 0$

Toda a variável multiplicada por zero, terá como resultado zero

2)  $A \cdot 1 = A$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 \cdot 1 = 0$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 \cdot 1 = 1$

Toda a variável multiplicada por 1, terá como resultado a própria variável

3)  $A \cdot A = A$

Se  $A = 1$ , temos:  $1 \cdot 1 = 1$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 \cdot 0 = 0$

Toda a variável multiplicada por ela própria, terá como resultado a variável

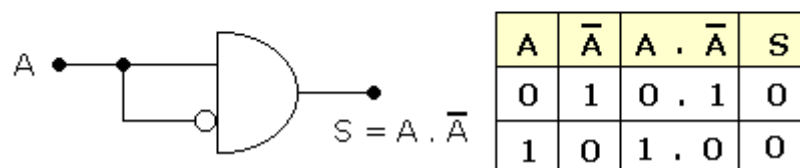
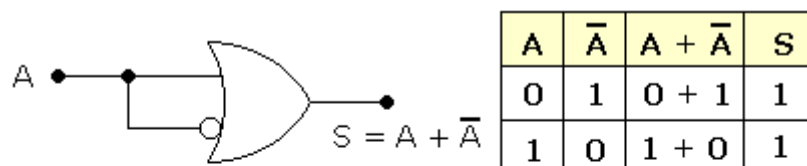
4)  $A \cdot \bar{A} = 0$

Se  $A = 0$ , temos:  $0 \cdot 1 = 0$  (pois  $\bar{A} = 1$ )

Se  $A = 1$ , temos:  $1 \cdot 0 = 0$  (pois  $\bar{A} = 0$ )

Toda a variável multiplicada por seu complemento, terá como resultado zero

Veja a seguir exemplos para melhor elucidação:



## PROPRIEDADES:

- a) comutativa
- b) associativa
- c) distributiva

### 1 – Propriedade comutativa na adição:

$$A + B = B + A$$

Tomemos como exemplo a expressão:  $A + B + C = S$

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

$$A + C + B = S$$

$$C + B + A = S$$

$$B + C + A = S, \text{ e assim por diante}$$

Vejamos como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A + C + B	C + B + A	B + C + A	S
0	0	0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0
0	0	1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	0 + 1 + 0	1
0	1	0	0 + 0 + 1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	1
0	1	1	0 + 1 + 1	1 + 1 + 0	1 + 1 + 0	1
1	0	0	1 + 0 + 0	0 + 0 + 1	0 + 0 + 1	1
1	0	1	1 + 1 + 0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1
1	1	0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1 + 0 + 1	1
1	1	1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1

### 2 – Propriedade comutativa na multiplicação:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Tomemos como exemplo a expressão:  $A \cdot B \cdot C = S$

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

$$A \cdot C \cdot B = S$$

$$C \cdot B \cdot A = S$$

$$B \cdot C \cdot A = S, \text{ e assim por diante}$$

Vejamos como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A . C . B	C . B . A	B . C . A	S
0	0	0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0
0	0	1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0 . 1 . 0	0
0	1	0	0 . 0 . 1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0
0	1	1	0 . 1 . 1	1 . 1 . 0	1 . 1 . 0	0
1	0	0	1 . 0 . 0	0 . 0 . 1	0 . 0 . 1	0
1	0	1	1 . 1 . 0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	0
1	1	0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	1 . 0 . 1	0
1	1	1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1

### 3 – Propriedade associativa na adição:

Na expressão  $A + B + C = S$ , aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A + (B + C) \rightarrow (A + B) + C \rightarrow B + (C + B) \dots$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A + B + C	A + (B + C)	(A + B) + C	B + (C + A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

### 4 – Propriedade associativa na multiplicação:

Na expressão  $A \cdot B \cdot C = S$ , aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A \cdot (B \cdot C) \rightarrow (A \cdot B) \cdot C \rightarrow B \cdot (C \cdot B) \dots$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A . B . C	A . (B . C)	(A . B) . C	B . (C . A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

### 5 – Propriedade distributiva na adição:

Considerando a expressão:  $A + (BC)$  ou  $A + (B.C)$

*Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.*

Aplicando a propriedade distributiva para a adição, teremos:

$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

$$A + (BC) = (A + B)(A + C)$$

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A + (BC)			(A + B)(A + C)		
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

## 6 – Propriedade distributiva na multiplicação:

Considerando a expressão:  $A \cdot (B + C)$  ou  $A(B + C)$

*Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.*

Aplicando a propriedade distributiva para a multiplicação, teremos:

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A . (B + C)			(AB) + (AC)		
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

## TEOREMAS de DE MORGAN

A álgebra de Boole é muito utilizada na simplificação algébrica de circuitos lógicos.

Muitas vezes para otimizar um circuito lógico é preciso fazer a conversão ou comutação de funções OR e AND.

Em outras palavras, isto significa que uma função OR deve ser convertida em uma função AND e vice-versa.

Para essa conversão ou transformação são utilizados os *TEOREMAS de DE MORGAN* que na realidade servem para obter o complemento de qualquer função booleana.

**Teorema 1:**

O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

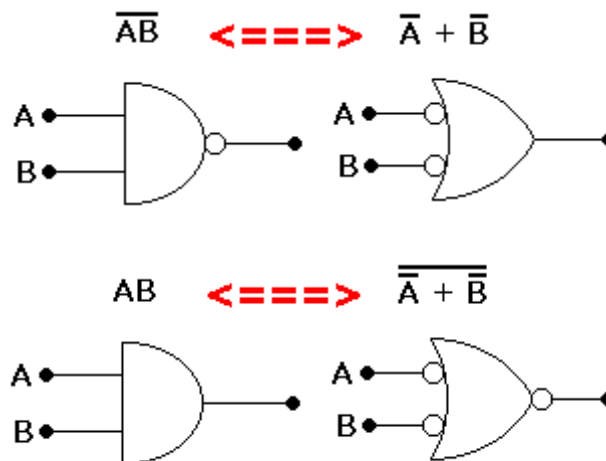
↑ soma dos complementos

↑ complemento do produto

$$AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

Veja na tabela abaixo as equivalências:

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$	AB	$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1



**Teorema 2:**

O complemento da soma é igual o produto dos complementos.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$$

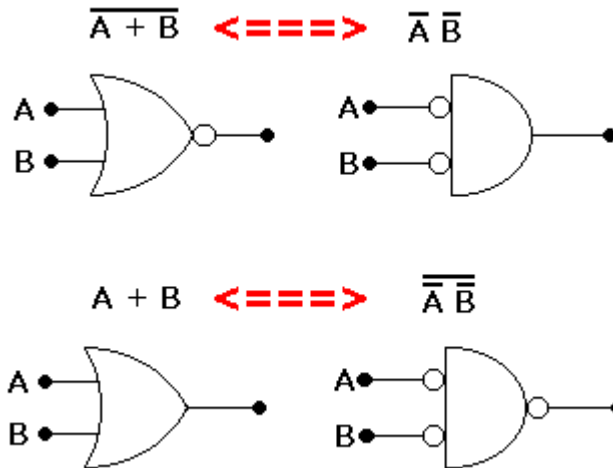
↑ produto dos complementos

↑ complemento da soma

$$A + B = \overline{\overline{A} \overline{B}}$$

Veja na tabela a seguir as equivalências:

A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \overline{B}$	$A + B$	$\overline{\overline{A} \overline{B}}$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1



## REGRA GERAL PARA A APLICAÇÃO DE DE MORGAN

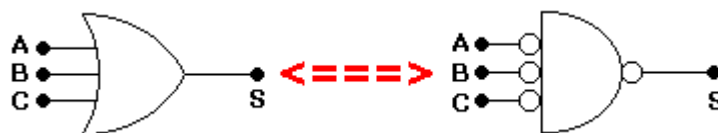
Dada a expressão:  $A + B + C + D$

1. Converte-se a função OR em AND;
2. Complementa-se individualmente cada variável ou termo;

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} = S$$

3. Complementa-se toda expressão:

$$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}} = S$$



Cada variável pode ser considerada como um termo. No exemplo acima, a expressão possui 4 variáveis ou 4 termos.

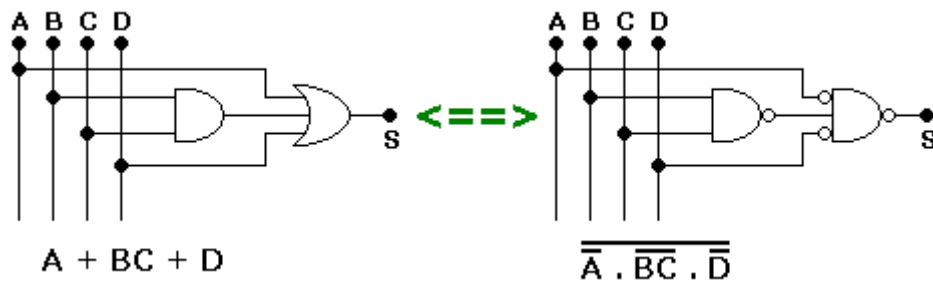
Por exemplo, no caso da expressão:  $A + BC + D = S$ , a mesma possui 4 variáveis mas está expressa em 3 termos.

A = primeiro termo



BC = segundo termo  
 D = terceiro termo  
 Aplicando *De Morgan* nos três termos:

$$\overline{\overline{A} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{D}} = S$$



Partindo da expressão  $A + BC + D = S$ , podemos aplicar *De Morgan* apenas no segundo termo:

Teremos então:

$$A + \overline{\overline{B} + \overline{C}} + D = S$$

#### EXEMPLO:

Dada a expressão abaixo, utilizar *De Morgan*:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

1. Utilizando a regra geral, podemos converter para uma função AND.

$$\overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{\overline{BC}} \cdot \overline{\overline{AC}}}} = S \implies \overline{\overline{A} \cdot BC \cdot AC} = S$$

2. Se aplicarmos *De Morgan* nos termos BC e AC que estão complementados, tudo poderá ser convertido em função OR. Lembrar que o complemento do produto é a soma dos complementos.

Partindo então da mesma expressão:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

$$A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{C} = S$$

#### Para resolver:

Para fixar o conceito sobre a aplicação das leis ou teoremas de *De Morgan* e as propriedades da álgebra de Boole, preencha a tabela a seguir, a partir da expressão:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

Trata-se da expressão utilizada como exemplo.

O resultado em S (saída) deverá ser o mesmo para as três colunas.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b><math>A + \overline{BC} + \overline{AC}</math></b>	<b><math>A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{C}</math></b>	<b><math>\overline{\overline{A} \cdot BC \cdot AC}</math></b>	<b>S</b>
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				