ÁLGEBRA DE BOOLE
POSTULADOS, TEOREMAS E PROPRIEDADES

A aplicação principal da álgebra de Boole é o estudo e a simplificação algébrica de circuitos lógicos. As variáveis booleanas podem assumir apenas dois valores: 0 e 1.

Na realidade uma expressão booleana é uma expressão matemática cujas variáveis são booleanas e o resultado será sempre 0 ou 1.

Consideremos por exemplo: **S = A + B →** Tanto S, como A, como B só podem assumir os valores 0 ou 1.

POSTULADOS: Os postulados são utilizados na minimização bem como na manipulação de expressões lógicas.

1 - POSTULADO DA COMPLEMENTAÇÃO:

Supondo a proposição A

O complemento de $A = \overline{A}$

Desta forma:

Se $A = 0 \dashrightarrow \overline{A} = 1$

Se $A = 1 \dashrightarrow \overline{A} = 0$

Considerando por exemplo os dígitos 1 e 0:

$\overline{1} = 0$

$\overline{0} = 1$

Através do postulado da complementação podemos estabelecer a identidade da dupla negação:

Se $A = 1$, teremos $\overline{A} = 0$

Se $\overline{A} = 0$, então $\overline{\overline{A}} = 1$

Se $A = 0$, teremos $\overline{A} = 1$

Se $\overline{A} = 1$, então $\overline{\overline{A}} = 0$

Concluímos então:

Quando $A = 1 \dashrightarrow \overline{\overline{A}} = 1$

Quando $A = 0 \dashrightarrow \overline{\overline{A}} = 0$

→ Daí: $\overline{\overline{A}} = A$

$$\boxed{\overline{\overline{0}} = 0 \quad e \quad \overline{\overline{1}} = 1}$$

2 - POSTULADO DA ADIÇÃO: Este postulado determina as regras da adição na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função OR.

Postulado	Teorema
$0 + 0 = 0$	$A + 0 = A$
$0 + 1 = 1$	$A + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$A + A = A$
$1 + 1 = 1$	$A + \overline{A} = 1$

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1) $A + 0 = A$

Se $A = 0$, temos: $0 + 0 = 0$
Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$
O resultado será sempre igual a variável A

2) $A + 1 = 1$

Se $A = 0$, temos: $0 + 1 = 1$
Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$

O resultado será sempre igual a 1
Sempre que somarmos 1 a qualquer variável, o resultado será sempre igual a 1

3) $A + A = A$

Se $A = 0$, temos: $0 + 0 = 0$
Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$
Todas as vezes que somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma

4) $A + \overline{A} = 1$

Se $A = 0$, temos: $0 + 1 = 1$ (pois $\overline{A} = 1$)
Se $A = 1$, temos: $1 + 0 = 1$ (pois $\overline{A} = 0$)
Quando somamos uma variável ao seu complemento o resultado será sempre 1

3 - POSTULADO DA MULTIPLICAÇÃO:

Este postulado determina as regras da multiplicação na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função AND.

Postulado	Teorema
$0 . 0 = 0$	$A . 0 = 0$
$0 . 1 = 0$	$A . 1 = A$
$1 . 0 = 0$	$A . A = A$
$1 . 1 = 1$	$A . \overline{A} = 0$

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1) $A . 0 = 0$

Se $A = 0$, temos: $0 . 0 = 0$
Se $A = 1$, temos: $1 . 0 = 0$

Toda a variável multiplicada por zero, terá como resultado zero

2) $A . 1 = A$

Se $A = 0$, temos: $0 . 1 = 0$
Se $A = 1$, temos: $1 . 1 = 1$

Toda a variável multiplicada por 1, terá como resultado a própria variável

3) $A . A = A$

Se $A = 1$, temos: $1 . 1 = 1$
Se $A = 0$, temos: $0 . 0 = 0$

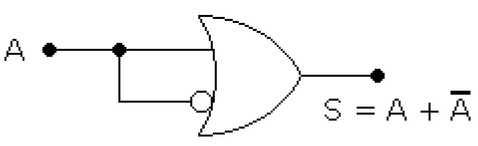
Toda a variável multiplicada por ela própria, terá como resultado a variável

4) $A . \overline{A} = 0$

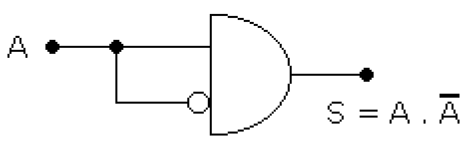
Se $A = 0$, temos: $0 . 1 = 0$ (pois $\overline{A} = 1$)
Se $A = 1$, temos: $1 . 0 = 0$ (pois $\overline{A} = 0$)

Toda a variável multiplicada por seu complemento, terá como resultado zero

Veja a seguir exemplos para melhor elucidação:



A	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$	S
0	1	0 + 1	1
1	0	1 + 0	1



A	$\overline{A}$	$A . \overline{A}$	S
0	1	0 . 1	0
1	0	1 . 0	0

PROPRIEDADES:

a) comutativa
b) associativa
c) distributiva

1 – Propriedade comutativa na adição:

$$A + B = B + A$$

Tomemos como exemplo a expressão: A + B + C = S

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

A + C + B = S
C + B + A = S
B + C + A = S, e assim por diante

Vejamos como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A + C + B	C + B + A	B + C + A	S
0	0	0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0
0	0	1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	0 + 1 + 0	1
0	1	0	0 + 0 + 1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	1
0	1	1	0 + 1 + 1	1 + 1 + 0	1 + 1 + 0	1
1	0	0	1 + 0 + 0	0 + 0 + 1	0 + 0 + 1	1
1	0	1	1 + 1 + 0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1
1	1	0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1 + 0 + 1	1
1	1	1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1

2 – Propriedade comutativa na multiplicação:

$$A . B = B . A$$

Tomemos como exemplo a expressão: A . B . C = S

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

A . C . B = S
C . B . A = S
B . C . A = S, e assim por diante

Vejamos como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A . C . B	C . B . A	B . C . A	S
0	0	0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0
0	0	1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0 . 1 . 0	0
0	1	0	0 . 0 . 1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0
0	1	1	0 . 1 . 1	1 . 1 . 0	1 . 1 . 0	0
1	0	0	1 . 0 . 0	0 . 0 . 1	0 . 0 . 1	0
1	0	1	1 . 1 . 0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	0
1	1	0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	1 . 0 . 1	0
1	1	1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1

3 – Propriedade associativa na adição:

Na expressão A + B + C = S, aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A + (B + C) \rightarrow (A + B) + C \rightarrow B + (C + A)...$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A + B + C	A + (B + C)	(A + B) + C	B + (C + A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

4 – Propriedade associativa na multiplicação:

Na expressão A . B . C = S, aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A \cdot (B \cdot C) \rightarrow (A \cdot B) \cdot C \rightarrow B \cdot (C \cdot A)...$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A . B . C	A . (B . C)	(A . B) . C	B . (C . A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

5 – Propriedade distributiva na adição:

Considerando a expressão: **A + (BC)** ou **A + (B.C)**

Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.

Aplicando a propriedade distributiva para a adição, teremos:

$$\mathbf{A + (B.C) = (A + B).(A + C)}$$

$$\mathbf{A + (BC) = (A + B)(A + C)}$$

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A	+ (BC)		(A + B)(A + C)		
0	0	0	*0*	*0*	0	*0*	*0*	0
0	0	1	*0*	*0*	0	*0*	*1*	0
0	1	0	*0*	*0*	0	*1*	*0*	0
0	1	1	*0*	*1*	1	*1*	*1*	1
1	0	0	*1*	*0*	1	*1*	*1*	1
1	0	1	*1*	*0*	1	*1*	*1*	1
1	1	0	*1*	*0*	1	*1*	*1*	1
1	1	1	*1*	*1*	1	*1*	*1*	1

6 – Propriedade distributiva na multiplicação:

Considerando a expressão: **A.(B + C)** ou **A(B + C)**

Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.

Aplicando a propriedade distributiva para a multiplicação, teremos:

A.(B + C) = (A.B) + (A.C)

A(B + C) = (AB) + (AC)

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A	. (B + C)		(AB) + (AC)		
0	0	0	*0*	*0*	0	*0*	*0*	0
0	0	1	*0*	*1*	0	*0*	*0*	0
0	1	0	*0*	*1*	0	*0*	*0*	0
0	1	1	*0*	*1*	0	*0*	*0*	0
1	0	0	*1*	*0*	0	*0*	*0*	0
1	0	1	*1*	*1*	1	*0*	*1*	1
1	1	0	*1*	*1*	1	*1*	*1*	1
1	1	1	*1*	*1*	1	*1*	*1*	1

TEOREMAS de DE MORGAN

A álgebra de Boole é muito utilizada na simplificação algébrica de circuitos lógicos.

Muitas vezes para otimizar um circuito lógico é preciso fazer a conversão ou comutação de funções OR e AND.

Em outras palavras, isto significa que uma função OR deve ser convertida em uma função AND e vice-versa.

Para essa conversão ou transformação são utilizados os *TEOREMAS de DE MORGAN* que na realidade servem para obter o complemento de qualquer função booleana.

Teorema 1:

O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

soma dos complementos

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

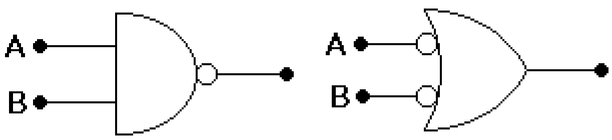
complemento do produto

$$\boxed{AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}}}$$

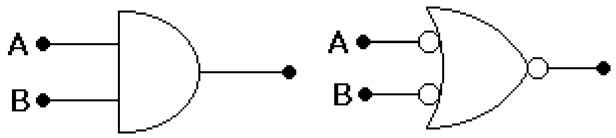
Veja na tabela abaixo as equivalências:

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$	AB	$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

$$\overline{AB} \iff \overline{A} + \overline{B}$$



$$AB \iff \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$



Teorema 2:

O complemento da soma é igual o produto dos complementos.

produto dos complementos

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

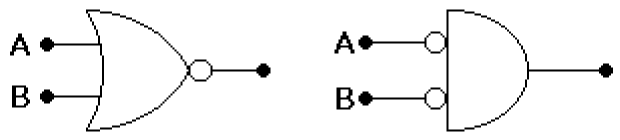
complemento da soma

$$\boxed{A + B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}}$$

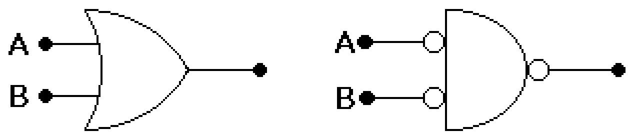
Veja na tabela a seguir as equivalências:

A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A + B$	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

$$\overline{A + B} \iff \overline{A}\,\overline{B}$$



$$A + B \iff \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$$



REGRA GERAL PARA A APLICAÇÃO DE *DE MORGAN*

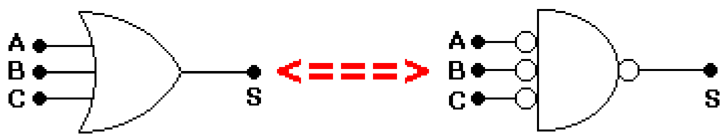
Dada a expressão: **A + B + C + D**

1. Converte-se a função OR em AND;
2. Complementa-se individualmente cada variável ou termo;

$$\overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, \overline{C} \,.\, \overline{D} = S$$

3. Complementa-se toda expressão:

$$\overline{\overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, \overline{C} \,.\, \overline{D}} = S$$

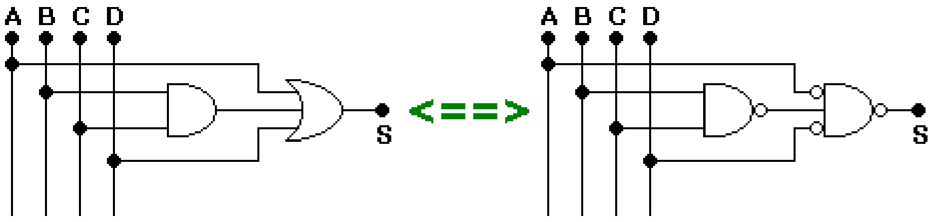


Cada variável pode ser considerada como um termo. No exemplo acima, a expressão possui 4 variáveis ou 4 termos.

Por exemplo, no caso da expressão: **A + BC + D = S**, a mesma possui 4 variáveis mas está expressa em 3 termos.

A = primeiro termo
BC = segundo termo
D = terceiro termo
Aplicando *De Morgan* nos três termos:

$$\overline{\overline{A}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{D}} = S$$



$A + BC + D$ $\qquad$ $\overline{\overline{A}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{D}}$

Partindo da expressão **A + BC + D = S**, podemos aplicar *De Morgan* apenas no segundo termo:

Teremos então:

$$A + \overline{\overline{B}+\overline{C}} + D = S$$

EXEMPLO:

Dada a expressão abaixo, utilizar *De Morgan*:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

1. Utilizando a regra geral, podemos converter para uma função AND.

$$\overline{\overline{A}\,.\,\overline{\overline{BC}}\,.\,\overline{\overline{AC}}} = S \quad ==> \quad \overline{\overline{A}\,.\,BC\,.\,AC} = S$$

2. Se aplicarmos *De Morgan* nos termos BC e AC que estão complementados, tudo poderá ser convertido em função OR. *Lembrar que o complemento do produto é a soma dos complementos.*

Partindo então da mesma expressão:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

$$A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{C} = S$$

Para resolver:

Para fixar o conceito sobre a aplicação das leis ou teoremas de *De Morgan* e as propriedades da álgebra de Boole, preencha a tabela a seguir, a partir da expressão:

$$A + \overline{BC} + \overline{AC} = S$$

Trata-se da expressão utilizada como exemplo.

O resultado em S (saída) deverá ser o mesmo para as três colunas.

A	B	C	$A + \overline{BC} + \overline{AC}$	$A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{C}$	$\overline{\overline{A} . BC . AC}$	S
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				