TEOREMAS DE “*DE MORGAN*”

Através dos teoremas de De Morgan, podemos transformar operações OR em AND e vice-versa.

Portanto, o teorema de De Morgan é utilizado quando se deseja obter o complemento de uma *função booleana*.

Existem dois teoremas básicos para tal procedimento:

Teorema 1

Portas AND e NAND

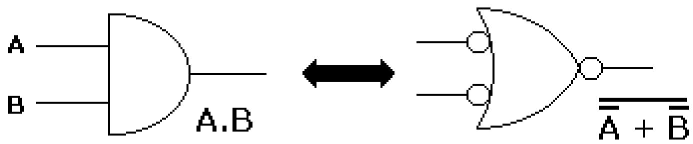
$$A.B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

1) Troca-se a função AND pela função OR
2) Complementa-se cada uma das variáveis
3) Complementa-se toda a expressão

A tabela abaixo mostra a identidade dessa operação:

Entradas		Saída	$\overline{A} + \overline{B}$	$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$	Saída
A	**B**				
0	0	**0**	1 + 1 = 1	0	**0**
0	1	**0**	1 + 0 = 1	0	**0**
1	0	**0**	0 + 1 = 1	0	**0**
1	1	**1**	0 + 0 = 0	1	**1**

Podemos então afirmar que os circuitos que correspondem a tabela acima são idênticos em relação a função que desempenham.



Aplicando De Morgan a partir de uma função NAND, teremos:

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

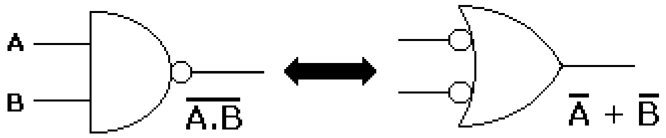
Pois,

$$\overline{A.B} = \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}$$

Lembrando que, a dupla complementação se cancela.

Construindo a tabela da verdade:

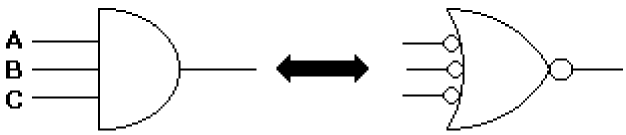
Entradas		Saída	$\overline{\overline{A + B}}$	$\overline{A} + \overline{B}$	Saída
A	B				
0	0	**1**	1 + 1	1	**1**
0	1	**1**	1 + 0	1	**1**
1	0	**1**	0 + 1	1	**1**
1	1	**0**	0 + 0	0	**0**



As regras do Teorema 1 de De Morgan se aplicam para quantas variáveis forem necessárias.

Vejamos um exemplo com 3 variáveis:

$$A.B.C = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$$



Entradas			Saída	A.B.C	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	Compl.	Saída
A	B	C					
0	0	0	**0**	0.0.0= 0	1+1+1 = 1	0	**0**
0	0	1	**0**	0.0.1= 0	1+1+0 = 1	0	**0**
0	1	0	**0**	0.1.0= 0	1+0+1 = 1	0	**0**
0	1	1	**0**	0.1.1= 0	1+0+0 = 1	0	**0**
1	0	0	**0**	1.0.0= 0	0+1+1 = 1	0	**0**
1	0	1	**0**	1.0.1= 0	0+1+0 = 1	0	**0**
1	1	0	**0**	1.1.0= 0	0+0+1 = 1	0	**0**
1	1	1	**1**	1.1.1= 1	0+0+0 = 0	1	**1**

Teorema 2

Portas OR e NOR

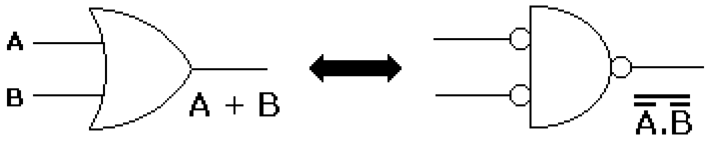
$$A + B = \overline{\overline{A}.\overline{B}}$$

1) Troca-se a função OR pela função AND
2) Complementa-se cada uma das variáveis
3) Complementa-se toda a expressão

A tabela a seguir mostra a identidade dessa operação:

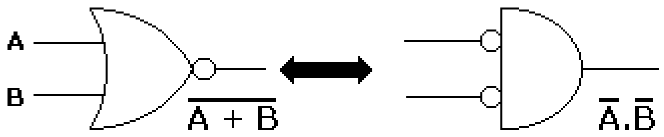
Entradas		Saída	$\bar{A}.\bar{B}$	$\overline{\bar{A}.\bar{B}}$	Saída
A	B				
0	0	**0**	1.1 = 1	0	**0**
0	1	**1**	1.0 = 0	1	**1**
1	0	**1**	0.1 = 0	1	**1**
1	1	**1**	0.0 = 0	1	**1**

$$A + B = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$



Aplicando De Morgan em uma função NOR, teremos:

$$\overline{A + B} = \bar{A}.\bar{B}$$



Pois,

$$\overline{A + B} = \overline{\overline{\bar{A}.\bar{B}}}$$

Lembrando que, dupla complementação se cancela.

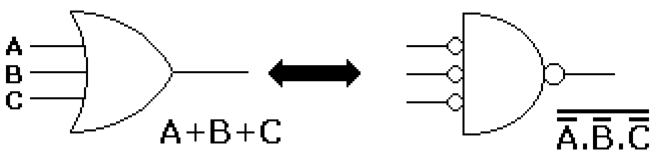
Entradas		Saída	$\overline{A + B}$	$\bar{A}.\bar{B}$	Saída
A	B				
0	0	**1**	0+0 = 1	1.1 = 1	**1**
0	1	**0**	0+1 = 0	1.0 = 0	**0**
1	0	**0**	1+0 = 0	0.1 = 0	**0**
1	1	**0**	1+1 = 0	0.0 = 0	**0**

Da mesma forma como no procedimento anterior, podemos utilizar mais de duas variáveis.

EXEMPLO COM MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Vejamos um exemplo com 3 variáveis:

$$A+B+C = \overline{\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}}$$

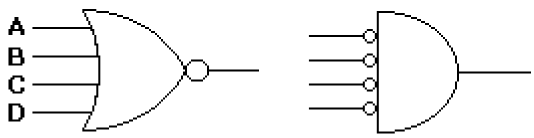


Entradas			Saída	A+B+C	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	Compl.	Saída
A	**B**	**C**					
0	0	0	**0**	0+0+0=0	1.1.1=1	0	**0**
0	0	1	**1**	0+0+1=1	1.1.0=0	1	**1**
0	1	0	**1**	0+1+0=1	1.0.1=0	1	**1**
0	1	1	**1**	0+1+1=1	1.0.0=0	1	**1**
1	0	0	**1**	1+0+0=1	0.1.1=0	1	**1**
1	0	1	**1**	1+0+1=1	0.1.0=0	1	**1**
1	1	0	**1**	1+1+0=1	0.0.1=0	1	**1**
1	1	1	**1**	1+1+1=1	0.0.0=0	1	**1**

Vimos que a aplicação dos teoremas de De Morgan, tem por finalidade converter funções OR em AND e vice-versa. Essas conversões em muitos casos, são utilizadas com o objetivo de otimizar expressões Booleanas.

Exemplos com 4 variáveis:

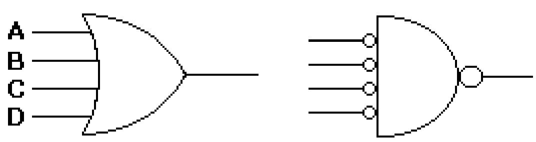
$$\overline{A+B+C+D} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$$



Lembrando que, dupla complementação é cancelada.

Entradas				$\overline{A+B+C+D}$	Saída	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$	Saída
A	**B**	**C**	**D**				
0	0	0	0	0	**1**	1.1.1.1	**1**
0	0	0	1	1	**0**	1.1.1.0	**0**
0	0	1	0	1	**0**	1.1.0.1	**0**
0	0	1	1	1	**0**	1.1.0.0	**0**
0	1	0	0	1	**0**	1.0.1.1	**0**
0	1	0	1	1	**0**	1.0.1.0	**0**
0	1	1	0	1	**0**	1.0.0.1	**0**
0	1	1	1	1	**0**	1.0.0.0	**0**
1	0	0	0	1	**0**	0.1.1.1	**0**
1	0	0	1	1	**0**	0.1.1.0	**0**
1	0	1	0	1	**0**	0.1.0.1	**0**
1	0	1	1	1	**0**	0.1.0.0	**0**
1	1	0	0	1	**0**	0.0.1.1	**0**
1	1	0	1	1	**0**	0.0.1.0	**0**
1	1	1	0	1	**0**	0.0.0.1	**0**
1	1	1	1	1	**0**	0.0.0.0	**0**

$$A+B+C+D = \overline{\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}}$$



Entradas				$A+B+C+D$	Saída	$\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}}$	Saída
A	**B**	**C**	**D**				
0	0	0	0	0	**0**	1.1.1.1	**0**
0	0	0	1	1	**1**	1.1.1.0	**1**
0	0	1	0	1	**1**	1.1.0.1	**1**
0	0	1	1	1	**1**	1.1.0.0	**1**
0	1	0	0	1	**1**	1.0.1.1	**1**
0	1	0	1	1	**1**	1.0.1.0	**1**
0	1	1	0	1	**1**	1.0.0.1	**1**
0	1	1	1	1	**1**	1.0.0.0	**1**
1	0	0	0	1	**1**	0.1.1.1	**1**
1	0	0	1	1	**1**	0.1.1.0	**1**
1	0	1	0	1	**1**	0.1.0.1	**1**
1	0	1	1	1	**1**	0.1.0.0	**1**
1	1	0	0	1	**1**	0.0.1.1	**1**
1	1	0	1	1	**1**	0.0.1.0	**1**
1	1	1	0	1	**1**	0.0.0.1	**1**
1	1	1	1	1	**1**	0.0.0.0	**1**

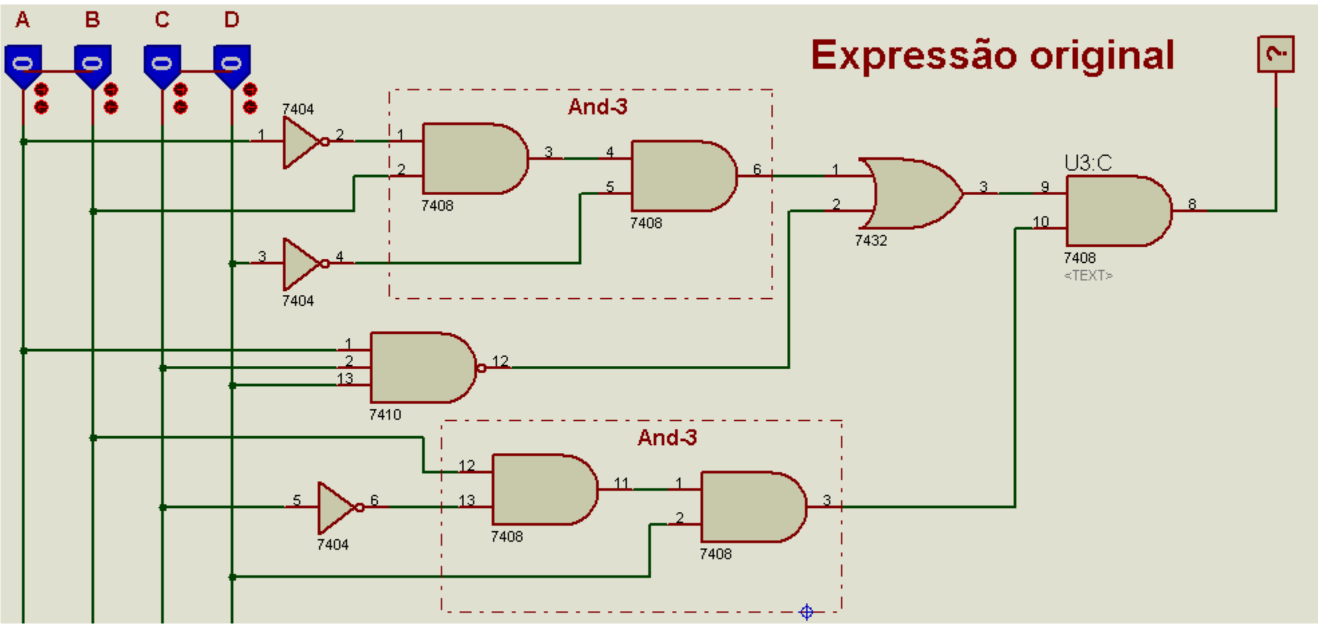
APLICAÇÃO EM EXPRESSÕES LÓGICAS

Vejamos um exemplo, em uma expressão que contém as funções OR e AND.

Dada a expressão lógica, aplicar os teoremas de De Morgan:

Dada a expressão:

$$(\overline{A}B\overline{D}+\overline{ACD}).(B\overline{C}D) = X$$

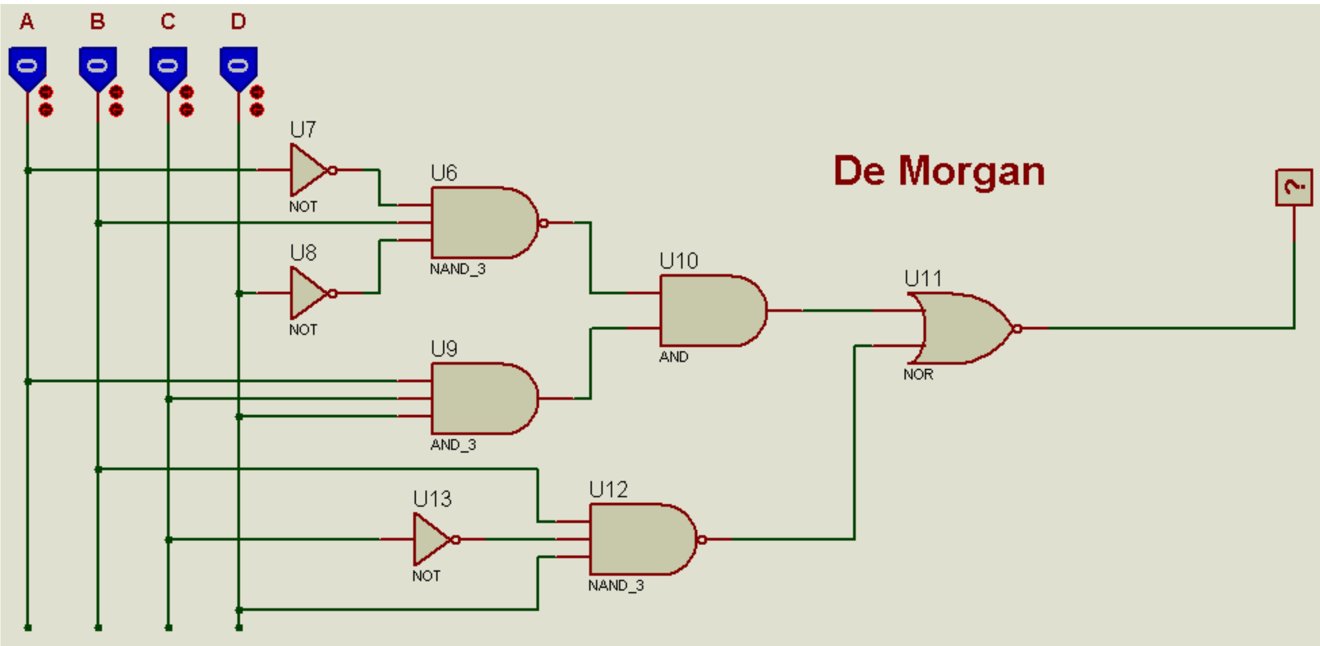


Entradas				$\bar{A}B\bar{D}$	$\overline{ACD}$	$\bar{A}B\bar{D}+\overline{ACD}$ x1	$B\bar{C}D$ x2	*x1.x2*		X
A	**B**	**C**	**D**							
0	0	0	0	0	1	1	0	0		**0**
0	0	0	1	0	1	1	0	0		**0**
0	0	1	0	0	1	1	0	0		**0**
0	0	1	1	0	1	1	0	0		**0**
0	1	0	0	1	1	1	0	0		**0**
0	1	0	1	0	1	1	1	1		**1**
0	1	1	0	1	1	1	0	0		**0**
0	1	1	1	0	1	1	0	0		**0**
1	0	0	0	0	1	1	0	0		**0**
1	0	0	1	0	1	1	0	0		**0**
1	0	1	0	0	1	1	0	0		**0**
1	0	1	1	0	0	0	0	0		**0**
1	1	0	0	0	1	1	0	0		**0**
1	1	0	1	0	1	1	1	1		**1**
1	1	1	0	0	1	1	0	0		**0**
1	1	1	1	0	0	0	0	0		**0**

Aplicando De Morgan:

$$\overline{(\overline{\overline{\bar{A}B\bar{D}}}.\ \overline{\overline{ACD}}) + (\overline{B\bar{C}D})} = X$$

$$\overline{(\overline{\overline{\bar{A}B\bar{D}}}.\ ACD) + (\overline{B\bar{C}D})} = X$$



Entradas				$\overline{\overline{A}B\overline{D}}$ (x1)	ACD (x2)	*x1.x2*	$\overline{B\overline{C}D}$ (x3)	*(x1.x2)+x3*	Compl.	**X**
A	**B**	**C**	**D**							
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	**0**
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	**0**
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	**0**
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	**0**
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	**0**
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	**0**
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	**0**
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	**0**
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	**0**
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	**0**
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	**1**
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	**0**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**0**

Compare as duas tabelas. As mesmas devem ser coincidentes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

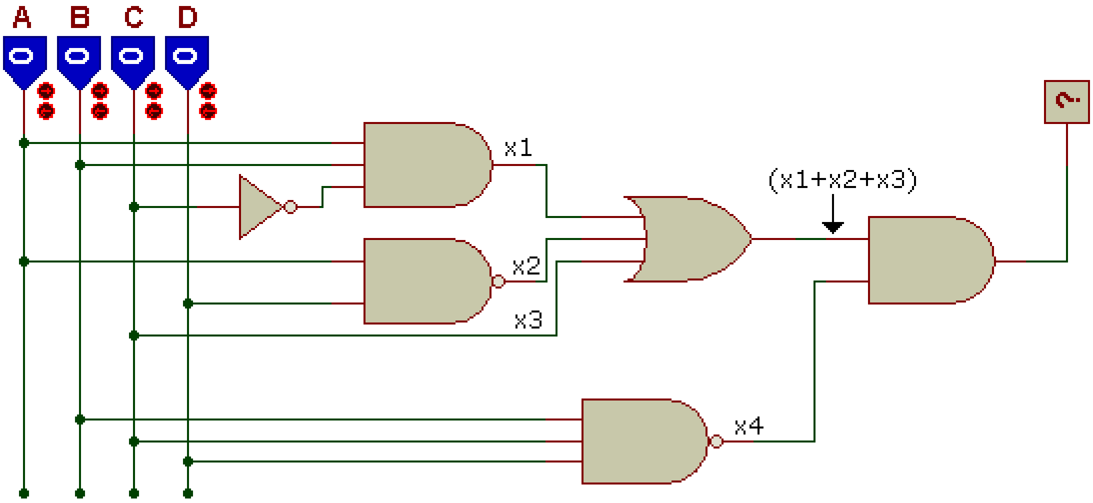
Aplicar De Morgan na expressão, elaborar as tabelas da verdade e fazer a comparação.

$$(AB\overline{C} + \overline{AD} + C)\,.\,(\overline{BCD}) = X$$

Entradas				$AB\overline{C}$ (x1)	$\overline{AD}$ (x2)	C (x3)	$\overline{BCD}$ (x4)	*(x1+x2+x3)*	*(x1+x2+x3).(x4)*	**X**
A	**B**	**C**	**D**							
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1.0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0.1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1.1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1.0**	**0**

Tabela 1

Circuito original



Expressão após a aplicação dos teoremas de De Morgan:

$$\underbrace{(AB\overline{C}+\overline{AD}+C)}_{1^{o}\ \text{termo}}\ .\ \underbrace{(\overline{BCD})}_{2^{o}\ \text{termo}} = X \iff \overline{\overline{(AB\overline{C}+\overline{AD}+C)}+(\overline{\overline{BCD}})} = X$$

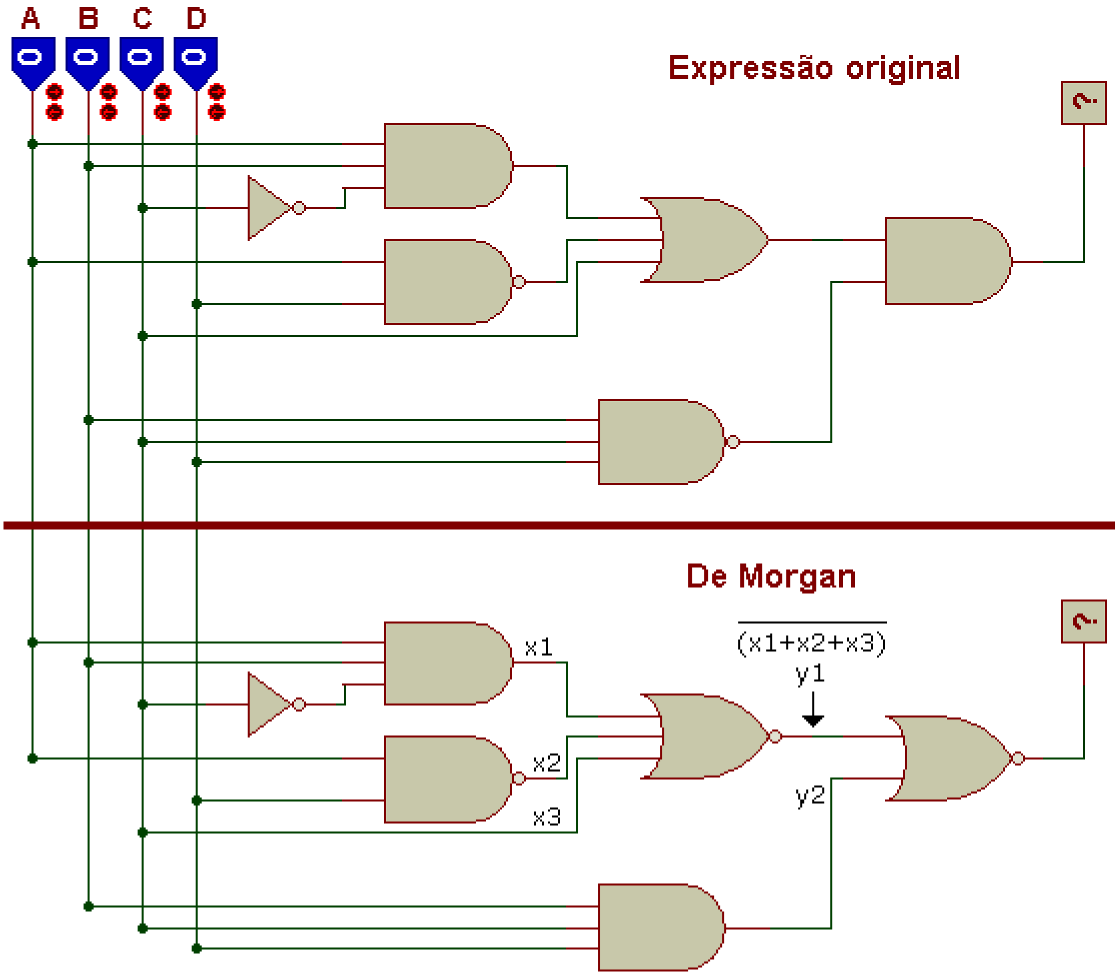
$$\overline{\overline{(AB\overline{C}+\overline{AD}+C)}+(BCD)} = X$$

Preenchendo a tabela a seguir e comparando com os dados obtidos na tabela 1, podemos verificar a veracidade dos teoremas de De Morgan.

A autenticidade das tabelas e feita comparando as duas saídas "X".

Entradas				$\overline{x1+x2+x3}$ (y1)	BCD (y2)	y1+y2	$\overline{y1+y2}$	**X**
A	**B**	**C**	**D**					
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

Tabela 2



A partir da expressão original:

$$(AB\bar{C} + \overline{AD} + C) \,.\, (\overline{BCD}) = X$$

Podemos aplicar os teoremas de De Morgan, aplicando a regra geral em cada um dos termos:

$$\overline{(\overline{\overline{AB\bar{C}}} \,.\, \overline{\overline{AD}} \,.\, \bar{C}) + (\overline{\overline{\overline{BCD}}})} = X$$

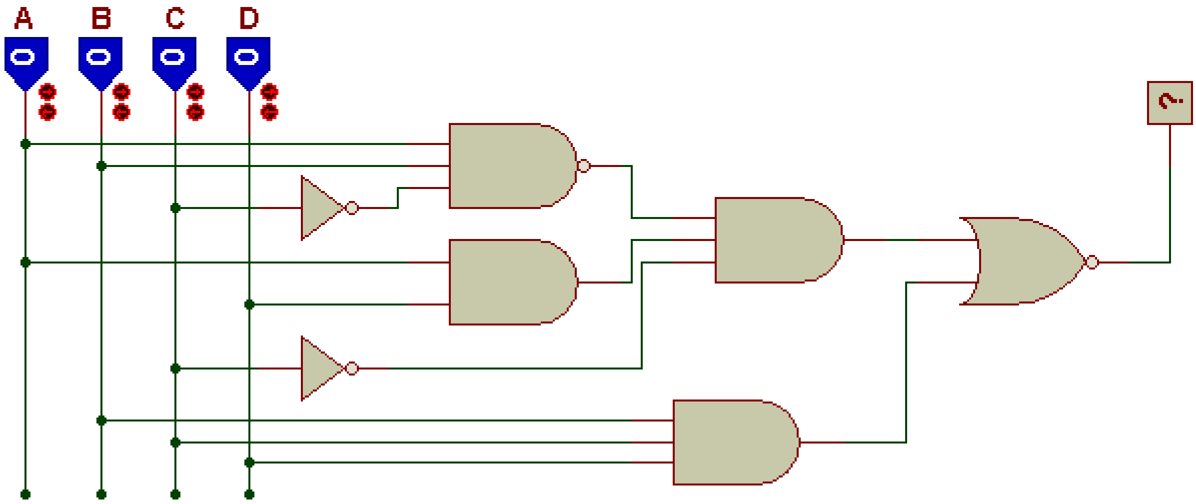
$$\overline{(\underset{x1}{\overline{AB\bar{C}}} \,.\, \underset{x2}{AD} \,.\, \underset{x3}{\bar{C}}) + (\underset{x4}{BCD})} = X$$

A partir da expressão final, podemos então elaborar a tabela da verdade.

Observe que x1, x2, x3 e x4 foram consideradas como variáveis. Nessa expressão foi aplicada a regra geral, onde as funções OR foram convertidas em função AND e vice-versa. Observe atentamente a complementação de cada variável e da expressão final.

Entradas				$\overline{AB\overline{C}}$ (x1)	AD (x2)	$\overline{C}$ (x3)	x1.x2.x3	BCD (x4)	$\overline{(x1.x2.x3)+x4}$	X
A	B	C	D							
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0

Tabela 3



Comparando as 3 tabelas, verificamos que as saídas “X” são idênticas, comprovando assim, os teoremas de De Morgan.